



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

**DIEF**

Dipartimento di  
Ingegneria Industriale

Grazzini 20/6/2016

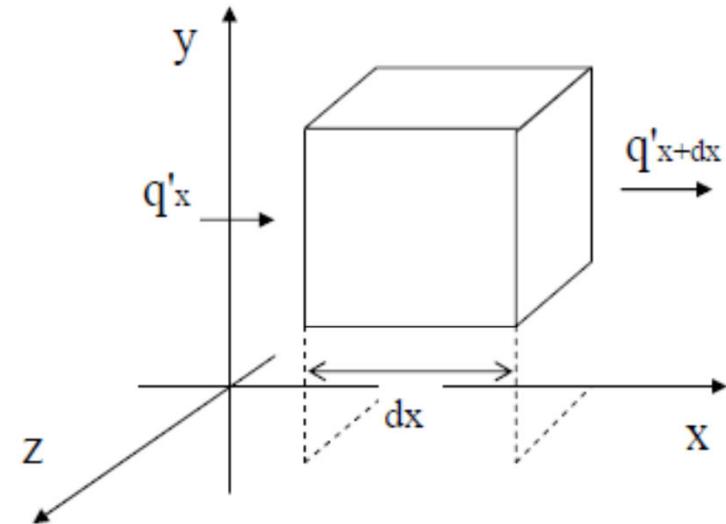
# L'equazione del telegrafista e la conduzione

**Giuseppe Grazzini**

Dottorato 20 giugno 2016

## Derivazione dell'equazione della conduzione

Si consideri, in un corpo solido, un piccolo elemento di materiale avente la forma di un parallelepipedo rettangolo di spigoli  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  paralleli rispettivamente agli assi  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Per ottenere un'equazione per la distribuzione di temperatura, si scriva il bilancio di energia per l'elemento



potenza termica entrante	+	potenza termica generata da sorgenti interne	=	potenza termica uscente	+	variazione dell'energia interna nell'unità di tempo
--------------------------	---	--	---	-------------------------	---	---

Tale bilancio può porsi nella forma simbolica

$$Q'_x + Q'_y + Q'_z + q'_g \, dx dy dz = Q'_{x+dx} + Q'_{y+dy} + Q'_{z+dz} + \rho c_v \, dx dy dz \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

Che diventa:

$$\begin{aligned} & q'_x dydz + q'_y dxdz + q'_z dxdy + q'_g dxdydz = \\ & = \left( q'_x + \frac{\partial q'_x}{\partial x} dx \right) dydz + \left( q'_y + \frac{\partial q'_y}{\partial y} dy \right) dxdz + \left( q'_z + \frac{\partial q'_z}{\partial z} dz \right) dxdy + \rho c_v dxdydz \frac{\partial T}{\partial \tau} \end{aligned}$$

E quindi:

$$\frac{\partial q'_x}{\partial x} + \frac{\partial q'_y}{\partial y} + \frac{\partial q'_z}{\partial z} - q'_g = -\rho c_v \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

Ed in condizioni stazionarie senza generazione interna

$$\frac{\partial q'_x}{\partial x} + \frac{\partial q'_y}{\partial y} + \frac{\partial q'_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{q}' = 0$$



J. B. Fourier introdusse, nella memoria presentata all'Academie de France nel 1807, la "legge di Fourier":  $q' = Q'/A = -k \, dT/dx$

Che, inserita nel bilancio dell'energia, fornisce l'equazione di Fourier

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad a = k / c \rho$$

La memoria non fu accettata perché alcuni revisori, Lagrange e Laplace in particolare, non condividevano la tecnica proposta per la soluzione.

Nel 1822 Fourier pubblicò autonomamente i suoi risultati nel libro  
"Theorie Analytique de la Chaleur"



## CONDUZIONE IN REGIME TRANSITORIO

Nel caso in cui lo stato del sistema non sia stazionario, occorre tener conto della variazione di energia interna.

Per un corpo solido che scambia una potenza termica  $\dot{Q}$  con l'ambiente, in assenza di lavoro, il 1° Principio della Termodinamica si scrive:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \dot{Q}$$

Se il corpo ha una temperatura superficiale uniforme  $T$  ed è lambito da un fluido a temperatura  $T_f$  si può scrivere:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = hA_s(T - T_f)$$

Affinchè l'energia termica passi dall'interno all'esterno del corpo, occorre che la sua temperatura sia disuniforme. Tuttavia, se la conducibilità del corpo  $k$  è alta e il coefficiente di convezione  $h$  è basso, la disuniformità di temperatura interna si può trascurare rispetto a  $(T - T_f) \Rightarrow$  **(modello a parametri concentrati)**

$$-cm \frac{\partial T}{\partial \tau} = hA_s(T - T_f)$$

con  $m$  massa,  $c$  calore specifico e  $T$  temperatura uniforme su tutto il corpo.

Introducendo  $\mathcal{G} = (T - T_f)$  e separando le variabili:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\mathcal{G}} = -\frac{hA_s}{cm} d\tau$$

che può essere integrata assumendo  $h, m, c$  costanti.

In transitorio, oltre alle condizioni al contorno, si devono conoscere le condizioni iniziali: essendo  $T_0$  la temperatura per  $\tau = 0$  e  $\mathcal{G}_0 = (T_0 - T_f)$ , si ottiene:

$$\ln \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}_0} = -\frac{hA_s}{cm} \tau$$

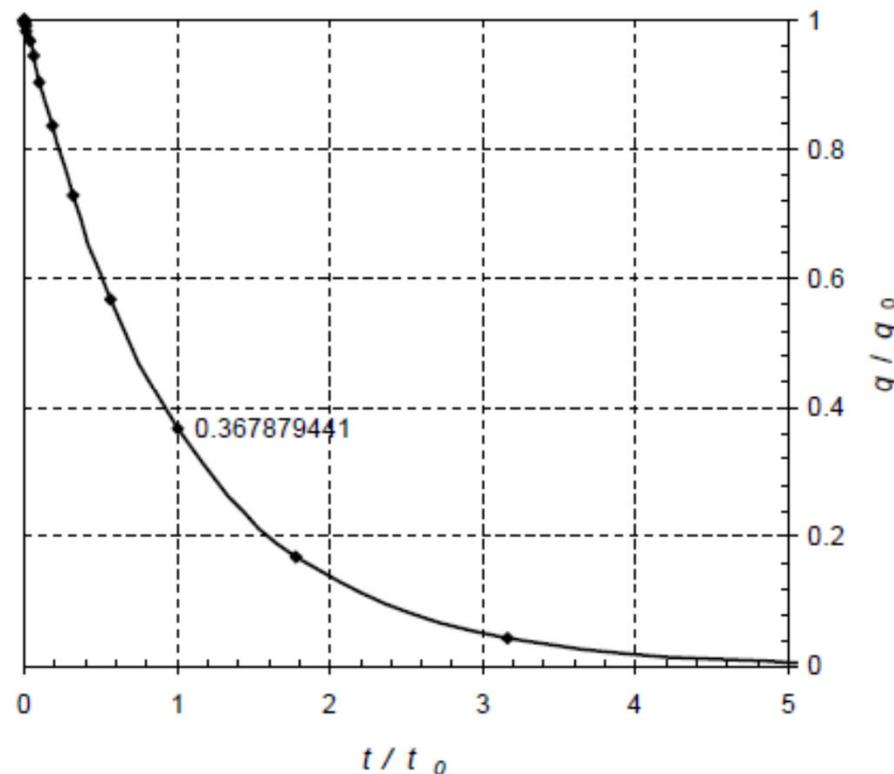
da cui:

$$\mathcal{G}(\tau) = \mathcal{G}_0 e^{-\frac{hA_s}{cm} \tau}$$

Il rapporto  $\frac{cm}{hA_s}$  ha le dimensioni di

un tempo: si definisce **costante di tempo** del sistema.

Per  $\tau = \frac{cm}{hA_s}$  si ha  $\mathcal{G} = 0.368 \mathcal{G}_0$



Introducendo poi una lunghezza caratteristica del corpo  $L = V / A_s$ , si può scrivere:

$$\frac{hA_s}{cm} \tau = \frac{hA_s}{c\rho V} \tau = \frac{h}{c\rho L} \tau = \left( \frac{hL}{k} \right) \left( \frac{k}{c\rho L^2} \tau \right)$$

E' utile quindi introdurre i rapporti adimensionali:

$$Bi = \left( \frac{hL}{k} \right) \quad \text{Numero di Biot}$$

$$Fo = \left( \frac{k}{c\rho L^2} \tau \right) = \left( \frac{\alpha}{L^2} \tau \right) \quad \text{Numero di Fourier}$$

Tramite i quali si può scrivere  $\mathcal{G}(\tau) = \mathcal{G}_0 e^{-Bi \cdot Fo}$

Il numero di Biot fornisce il criterio di validità del modello a parametri concentrati: per  $Bi < 0.1$  l'errore commesso è stimabile in meno del 5%.

Il numero di Fourier serve per adimensionalizzare il tempo.

## Mezzo semi-infinito (Problema di Stefan)

Continuo delimitato da una superficie piana e da altre superfici molto distanti dal dominio di calcolo.

Diffusività termica  $\alpha = \text{cost.}$

Assenza di generazione interna di calore.

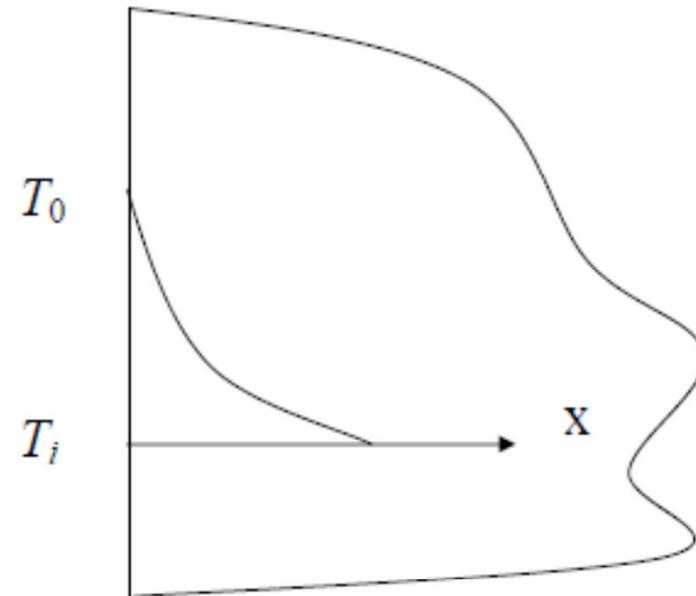
$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

con condizione iniziale:  $T(x,0) = T_i$ , e  
condizione al contorno  $T(0,\tau) = T_0$ .

Temperatura adimensionale:

$$\mathcal{G} = \frac{T - T_i}{T_0 - T_i}$$

Distanza adimensionale:  $\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$



$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = (T_0 - T_i) \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = (T_0 - T_i) \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \tau}, \text{ con } \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{x}{2\sqrt{\alpha}} \left( -\frac{1}{2} \tau^{-\frac{3}{2}} \right) = -\frac{\eta}{2\tau}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (T_0 - T_i) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = (T_0 - T_i) \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = (T_0 - T_i) \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \frac{1}{2\sqrt{\alpha\tau}}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{(T_0 - T_i)}{2\sqrt{\alpha\tau}} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{(T_0 - T_i)}{4\alpha\tau} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2}$$

L'equazione di Fourier diventa così:  $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} + 2\eta \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = 0$

con le condizioni al contorno:  $\vartheta \rightarrow 0$  per  $\eta \rightarrow \infty$ ;  $\vartheta = 1$  per  $\eta = 0$

Ponendo  $Y = \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}$  si può scrivere:  $\frac{\partial Y}{\partial \eta} + 2\eta Y = 0$

che si risolve separando le variabili e da:  $\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = Y = c_1 e^{-\eta^2}$

La soluzione generale è dunque:  $\mathcal{G} = c_1 \int e^{-\eta^2} d\eta + c_2$

Essendo  $\mathcal{G} = 1$  per  $\eta = 0$  dev'essere  $c_2 = 1$ .

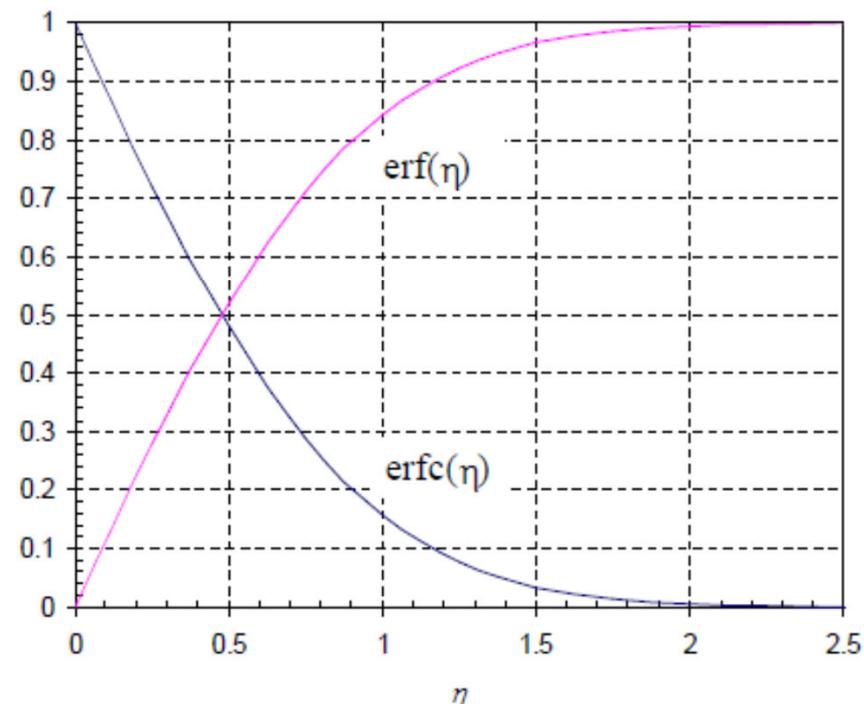
La funzione  $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$  è detta “funzione degli errori di Gauss” ed

è tabulata. Per  $x \rightarrow \infty$ ,  $erf(x) = 1$ , per cui, dovendo essere  $\mathcal{G} \rightarrow 0$  per  $\eta \rightarrow \infty$ ,

sarà  $c_1 = -2/\sqrt{\pi}$ . In conclusione:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{T - T_i}{T_0 - T_i} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz = \\ &= 1 - erf(\eta) = erfc(\eta) \end{aligned}$$

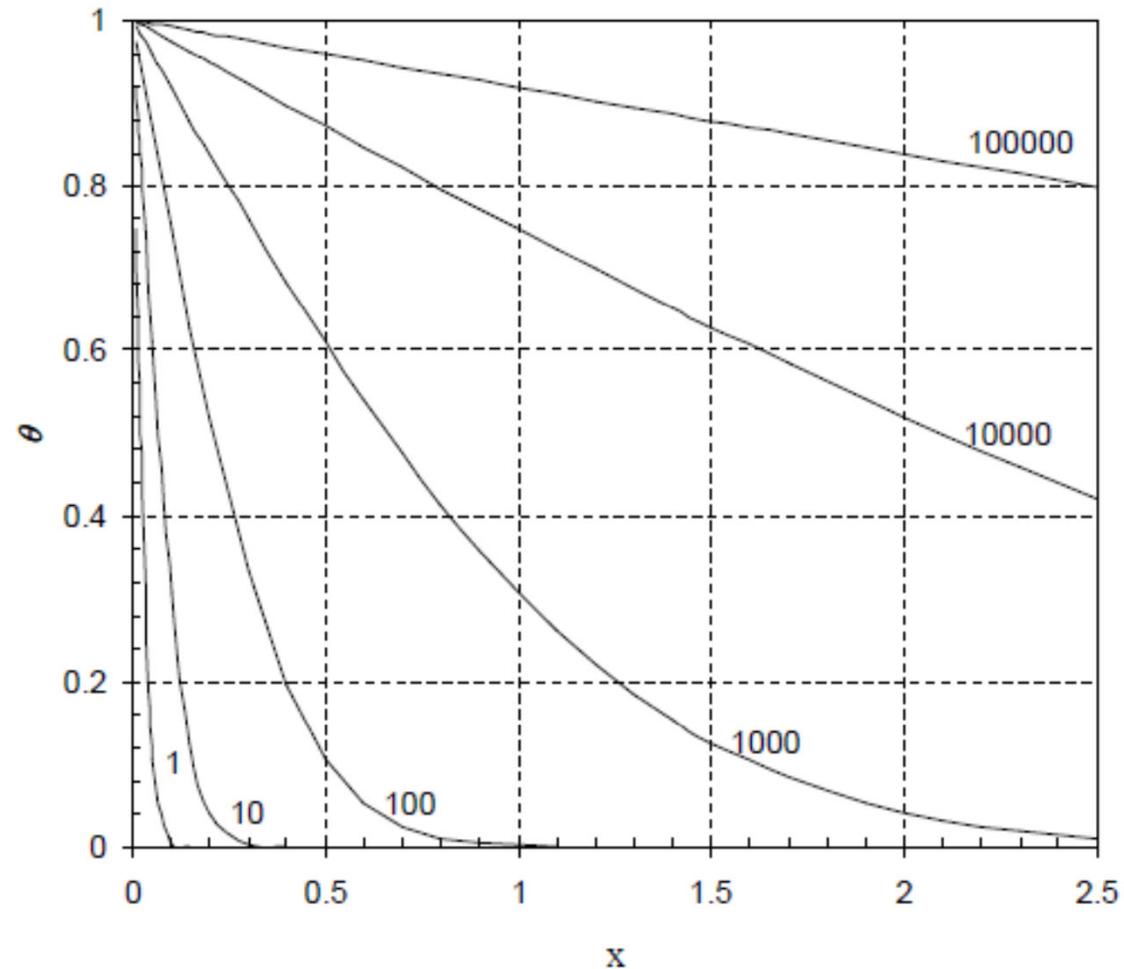
La funzione  $erfc$ , complemento ad 1 di  $erf$  è plottata in figura.



Come semplice esempio numerico, consideriamo un mezzo semi-infinito avente le caratteristiche seguenti:

calore specifico  
 $c \quad 0.78 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$   
 densità  
 $\rho \quad 1920 \text{ kg m}^{-3}$   
 conducibilità  
 $k \quad 0.72 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$   
 diffusività  
 $\alpha \quad 0.00048 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

le varie curve si riferiscono a diversi valori di  $\tau$ .  
 Si ha crescente penetrazione del fronte termico, sino a che, per tempi lunghi, si tende all'equilibrio.



La pendenza delle curve  $\partial \theta / \partial x$  visualizza l'entità del calore scambiato  $q$ .

C. Cattaneo, Sulla Conduzione del Calore, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 3 (1948) 83-101

La teoria della conduzione del calore, istituita dal FOURIER oltre un secolo fa e da allora rimasta sostanzialmente inalterata, culmina in un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine la quale, se il mezzo conduttore è termicamente isotropo e omogeneo, ha la forma, ben nota,

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t} ;$$

ove  $u$  rappresenta la temperatura, funzione delle coordinate spaziali  $x, y, z$  e del tempo  $t$ , e  $D$  è un coefficiente — *coefficiente di diffusione termica* — costante nelle nostre ipotesi, legato alla natura fisica del mezzo conduttore. All'equazione (1) la teoria associa d'ordinario una condizione al contorno di tipo lineare tra  $u$  e la sua derivata normale

$$\frac{d u}{d n} = h (u - u_0)$$

Da un punto di vista matematico l'equazione del calore costituisce l'esempio tipico di equazione lineare del secondo ordine del tipo parabolico; come tale presenta qualche carattere speciale molto significativo anche dal lato fisico. Si consideri, ad esempio, uno dei problemi classici legati alla equazione del calore: supposto l'intero spazio riempito di un mezzo conduttore, immaginiamo che a un certo istante, che diremo  $t = 0$ , si abbia la seguente distribuzione di temperatura:

$$u \equiv 0$$

al di fuori di una certa regione limitata  $R$ ;

$$u = f(x, y, z)$$

entro  $R$ , essendo la  $f$  una qualunque funzione positiva, nulla al più sul contorno di  $R$ . La soluzione della equazione (1) corrispondente a queste condizioni iniziali e all'unica ulteriore condizione di regolarità all'infinito, è rappresentata, in tutto lo spazio e a ciascun istante  $t > 0$ , dalla formula

$$(2) \quad u(x, y, z, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, \zeta) e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4Dt}} d\xi d\eta d\zeta.$$

Risulta da essa che ad ogni istante  $t > 0$ , per prossimo che esso sia all'istante iniziale,  $u$  ha un valore positivo in ogni punto dello spazio.

Le cose appaion dunque svolgersi come se il calore inizialmente contenuto in  $R$  si fosse *istantaneamente* propagato a zone comunque

Condizione iniziale  $u=0$  ovunque



lontane. La circostanza non è limitata a questo esempio ma è assolutamente generale, in dipendenza del carattere parabolico dell'equazione differenziale (1), in dipendenza cioè del fatto che essa non ammette altre caratteristiche reali che le varietà  $t = \text{cost.}$  Considerando l'analogo problema unidimensionale, corrispondente, per es., alla propagazione del calore in un filo indefinito, lateralmente isolato, l'equazione (1) si semplifica e assume la forma ridotta

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t},$$

mentre la soluzione determinata da un'assegnata distribuzione iniziale di temperatura

$$u(x, 0) = f(x),$$

è fornita dalla funzione

$$(4) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi,$$

Cattaneo ricavò un'equazione che evitasse il problema partendo dalla teoria cinetica dei gas. E' possibile ricavarla con un diverso approccio proposto da D. Y. Tzou [1993] usando l'espansione in serie di Taylor. Quindi scriviamo:

$$q'(\tau + \varepsilon) = q'(\tau) + \varepsilon \frac{dq'(\tau)}{d\tau} \quad \text{e} \quad u(\tau + \varepsilon) = u(\tau) + \varepsilon \frac{du(\tau)}{d\tau}$$

Il primo principio diviene allora (in condizioni monodimensionali per semplicità):

$$\frac{dq'_x}{dx} + \varepsilon \frac{d}{dx} \left( \frac{dq'_x}{d\tau} \right) = -\rho \left( \frac{du}{d\tau} + \varepsilon \frac{d^2u}{d\tau^2} \right)$$

Che con  $du = c_v dT$  ed **usando la legge di Fourier con  $k$  costante**:

$$\frac{k}{\rho c_v} \left[ \frac{d^2T}{dx^2} + \varepsilon \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{dT}{d\tau} \right) \right] = \frac{dT}{d\tau} + \varepsilon \frac{d^2T}{d\tau^2}$$

definendo  $\alpha = k/\rho c_v$  e  $c^2 = \alpha/\varepsilon$

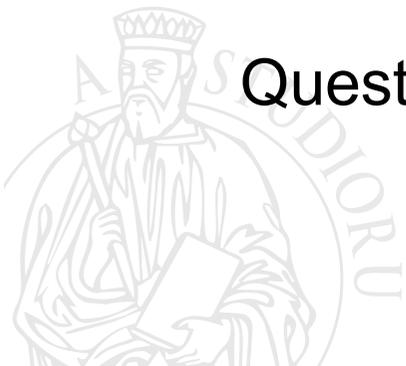
$$c^2 \frac{d^2 T}{dx^2} + \alpha \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{dT}{d\tau} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{dT}{d\tau} + \frac{d^2 T}{d\tau^2}$$

Trascurando il secondo termine di sinistra si ottiene

$$c^2 \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{dT}{d\tau} + \frac{d^2 T}{d\tau^2}$$

Dove  $c$  è una velocità di propagazione finita e  $c'$  è un termine di attenuazione legato al tempo di rilassamento  $\varepsilon$ .

Questa è una equazione iperbolica detta **del telegrafista**.



Si schematizza una linea di trasmissione come una serie di celle elementari (come quella in figura). Ognuna di queste celle ha lunghezza infinitesima, ed è composta da  $L$  ed  $R$  in serie, e  $C$  e  $G$  in parallelo. Esistono notazioni che associano a ogni componente la derivata rispetto alla lunghezza della rispettiva grandezza fisica, a sottolineare che la cella che si sta considerando è un segmento infinitesimo della linea.

## Linea dispersiva

Per semplicità consideriamo una linea di trasmissione nel caso unidimensionale, quindi rettilinea ed infinita. Indichiamo inoltre con  $R$ ,  $C$  e  $G$  rispettivamente la resistenza, la capacità e la conduttanza del sistema relative all'unità di lunghezza. Poniamo  $x$  la coordinata iniziale della cella infinitesima di trasmissione, e con  $(x + dx)$  la coordinata finale (in pratica  $x$  è a monte di tutti gli elementi circuitali,  $x + dx$  a valle di tutti): quindi la cella si estende per il tratto infinitesimo  $dx$ .

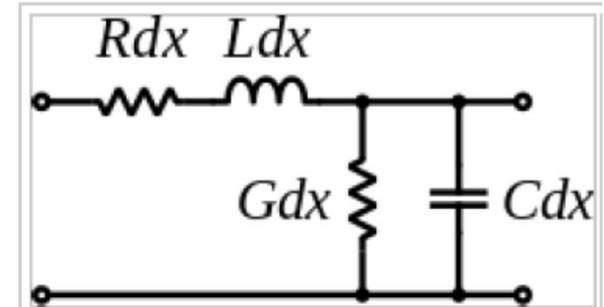
Prima della resistenza  $R$  avremo quindi una differenza di potenziale  $V(x, t)$ , mentre il condensatore di capacità  $C$  e la conduttanza  $G$  saranno quindi ad una stessa differenza di potenziale  $V(x + dx)$ , essendo in parallelo.

Scriviamo l'equazione delle maglie per il potenziale:

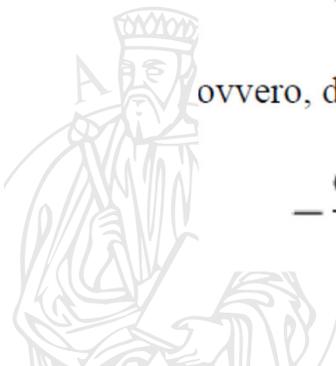
$$V(x, t) - (dx \cdot R)I(x, t) - (dx \cdot L) \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} - V(x + dx, t) = 0$$

ovvero, dividendo entrambi i membri per  $dx$ :

$$-\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} + RI(x, t)$$



Rappresentazione schematica della cella elementare di una linea di trasmissione.



Possiamo inoltre scrivere una seconda equazione per la carica contenuta nel condensatore:

$$dQ = (dx \cdot C)dV = [I(x, t) - I(x + dx, t) - I_p]dt$$

dove abbiamo indicato con  $I_p$  la corrente che passa nella conduttanza  $G$ , detta **corrente di perdita**, che in particolare vale:

$$I_p = (dx \cdot G) \cdot V(x + dx, t)$$

Otteniamo quindi l'equazione:

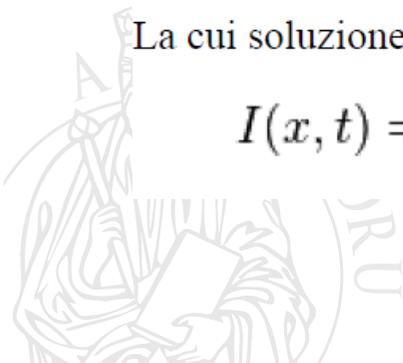
$$-\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = C \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + G \cdot V(x, t)$$

Abbiamo così due equazioni differenziali accoppiate, che è possibile disaccoppiare ottenendo la seguente, detta **equazione del telegrafista**:

$$\frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} + GR \cdot I(x, t)$$

La cui soluzione è della forma:

$$I(x, t) = e^{-\gamma x} f(x - vt)$$



Derivando rispetto ad  $x$  e  $t$ , sostituendo nell'equazione con alcuni passaggi si ottiene:

$$2\frac{\gamma}{v} = RC + GL$$

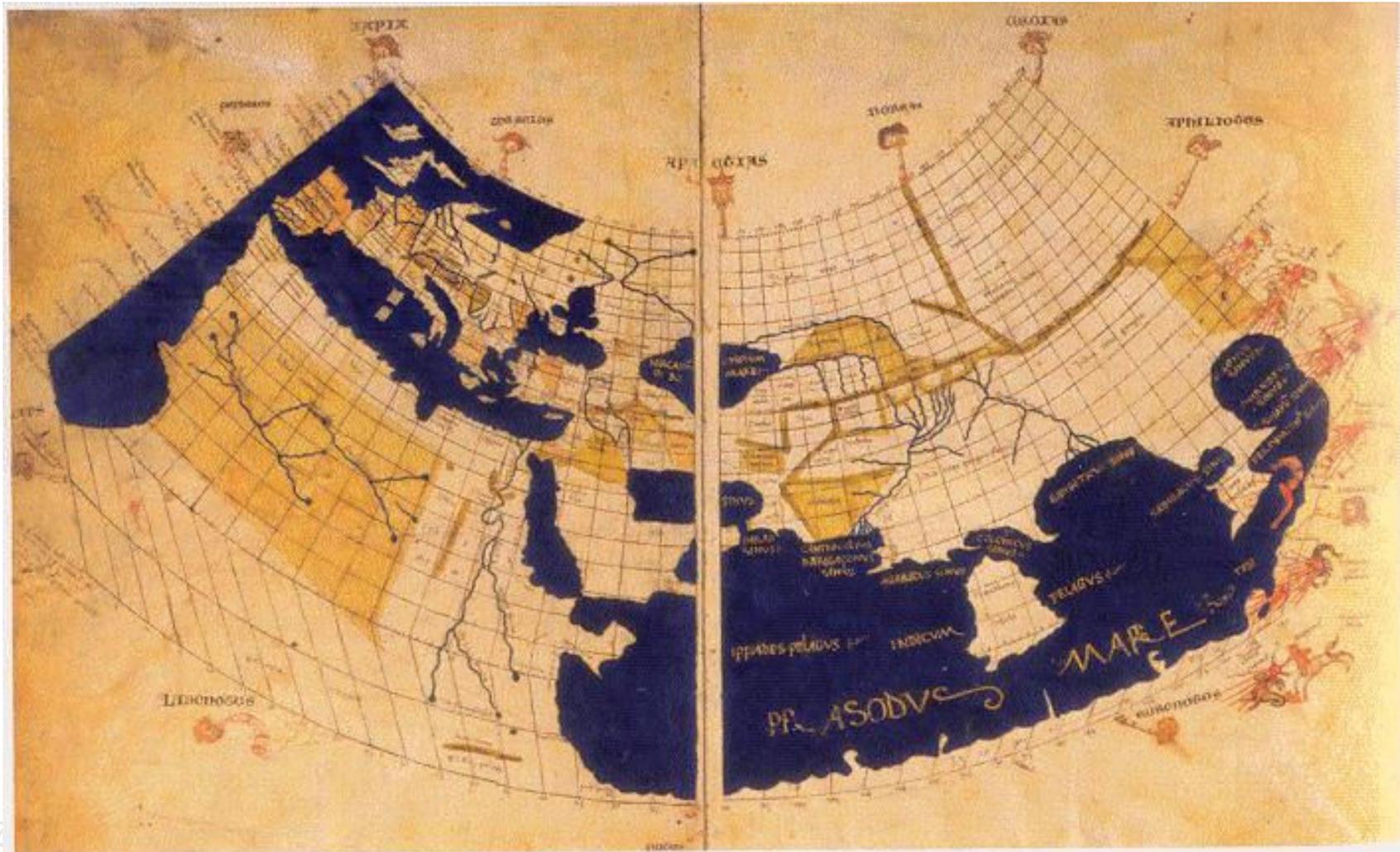
Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Le **equazioni dei telegrafisti** mettono in relazione tensione e corrente in una linea di trasmissione. Esse si ricavano dal modello delle linee di trasmissione, anch'esso elaborato da Oliver Heaviside intorno al 1880. Questo modello si applica alle linee di trasmissione alle alte frequenze, ma è importante anche nella progettazione di linee per il trasporto di energia in alta tensione. Con questo modello e queste equazioni si riesce a dimostrare che le onde elettromagnetiche possono riflettersi sulla linea, e che vi si possono trovare forme d'onda.

**L'equazione di Cattaneo è equivalente con  $G=0$**

Per capire l'importanza dell'equazione del telegrafista bisogna considerare il problema della determinazione delle «contemporaneità» ed il suo legame con la misura delle dimensioni del pianeta terra.





21. Il più antico mappamondo dalla *Geografia* di Tolomeo in latino (inizi del xv secolo), parte della "riscoperta" rinascimentale della classicità. © 2012 Biblioteca apostolica vaticana (Cod. Vat. Lat. 5000)

*L.Russo L'America dimenticata, Mondadori, 2013*

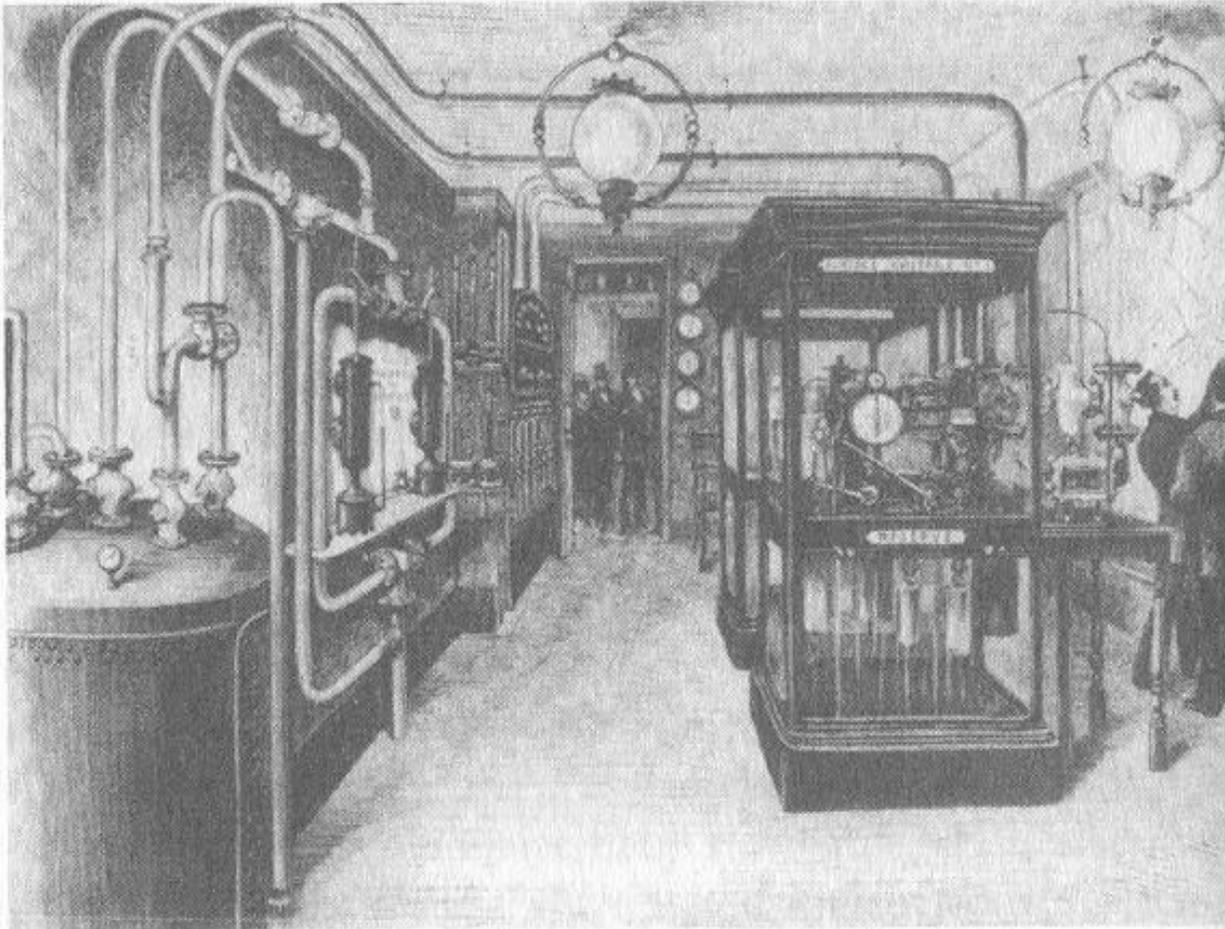


Figura 12. *L'unificazione pneumatica del tempo: la sala di controllo (1880 circa). Dalla stanza di controllo nella Rue du Télégraphe a Parigi, le tubature pompavano il tempo sotto le strade cittadine per sincronizzare gli orologi in ogni quartiere della metropoli. Fonte: Compagnie Générale des Horloges Pneumatique, Archives de la Ville de Paris, VONC 20.*

P. Galison  
*Gli orologi di Einstein,  
le mappe di Poincaré*  
RCS MediaGroup,  
Milano, 2014

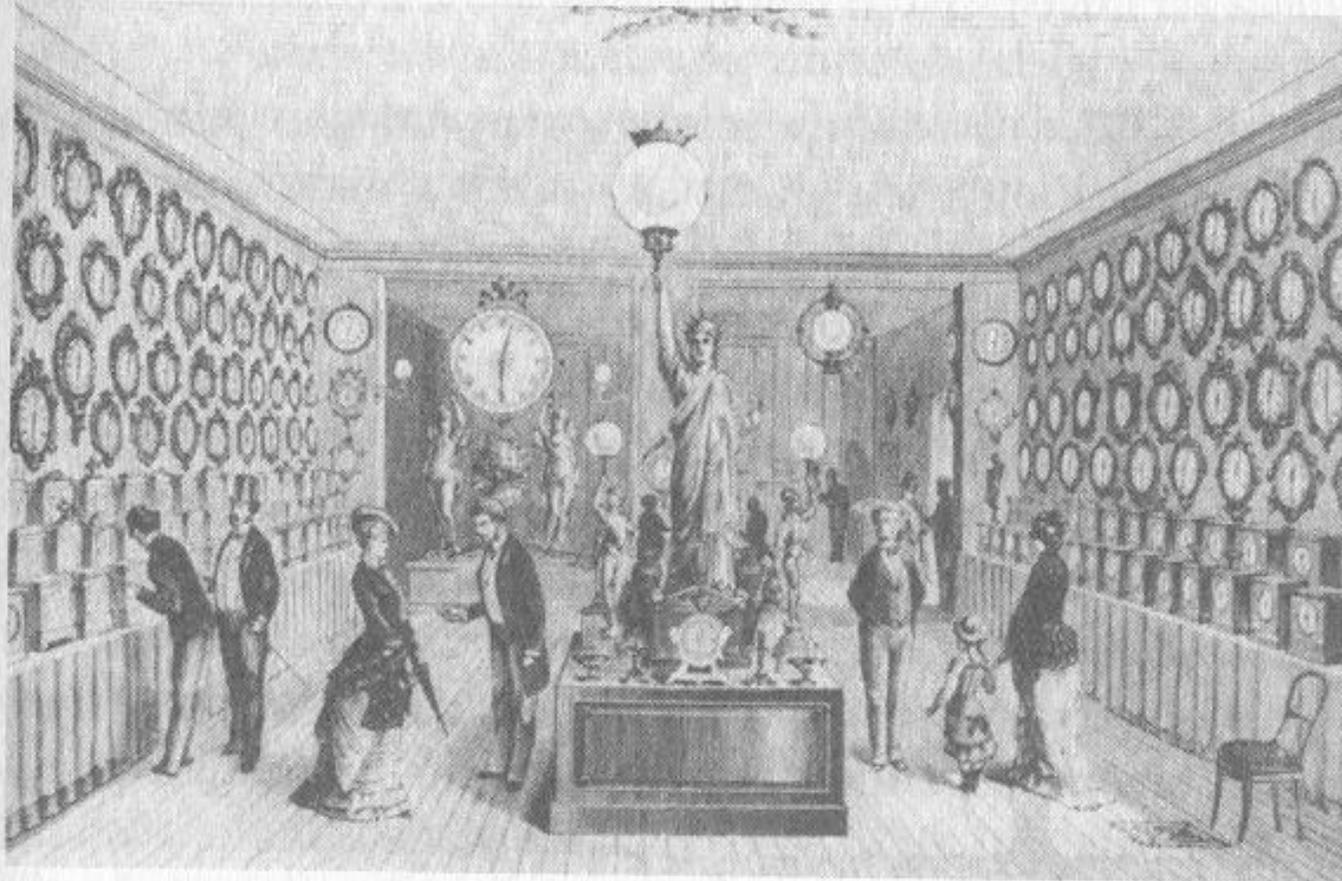
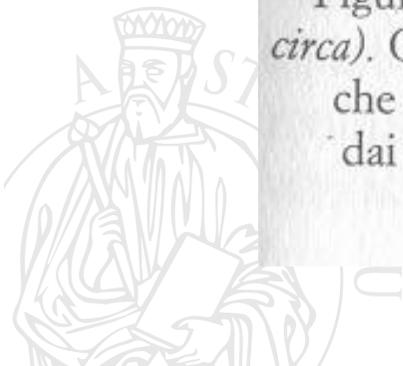


Figura 13. *L'unificazione pneumatica del tempo: la sala dei quadranti (1880 circa)*. Qui i clienti – sia commercianti sia privati – potevano acquistare orologi che registravano gli sbuffi d'aria, perfettamente scanditi, che ricevevano dai tubi pneumatici di Parigi. *Fonte: Compagnie Générale des Horloges Pneumatique, Archives de la Ville de Paris, VONC 20.*



La solution du problème du mur selon le modèle hyperbolique, développée par Baumeister et Hamil [8] est alors :

(Stefan)

$$\begin{aligned}
 T^*(y^*, t^*) &= \left( \exp\left(-\frac{t^*}{2}\right) I_0\left(\frac{\sqrt{t^{*2} - (y^* \sqrt{3})^2}}{2}\right) H(t^* - y^* \sqrt{3}) \right) \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^{t^*} \exp\left(-\frac{t^*}{2}\right) \left[ I_1\left(\frac{t^* - t'}{2}\right) + I_0\left(\frac{t^* - t'}{2}\right) \right] \\
 &\cdot I_0\left(\frac{\sqrt{t'^2 - (y^* \sqrt{3})^2}}{2}\right) H(t' - y^* \sqrt{3}) dt' \quad (17)
 \end{aligned}$$

où  $I_0$  et  $I_1$  sont les fonctions de Bessel modifiées d'ordre 0 et 1 respectivement et  $H$  est la fonction Heaviside.



$$T^* = \frac{T}{T_1}, \quad y^* = \frac{y}{l_{pm}}, \quad t^* = \frac{t}{\tau}$$

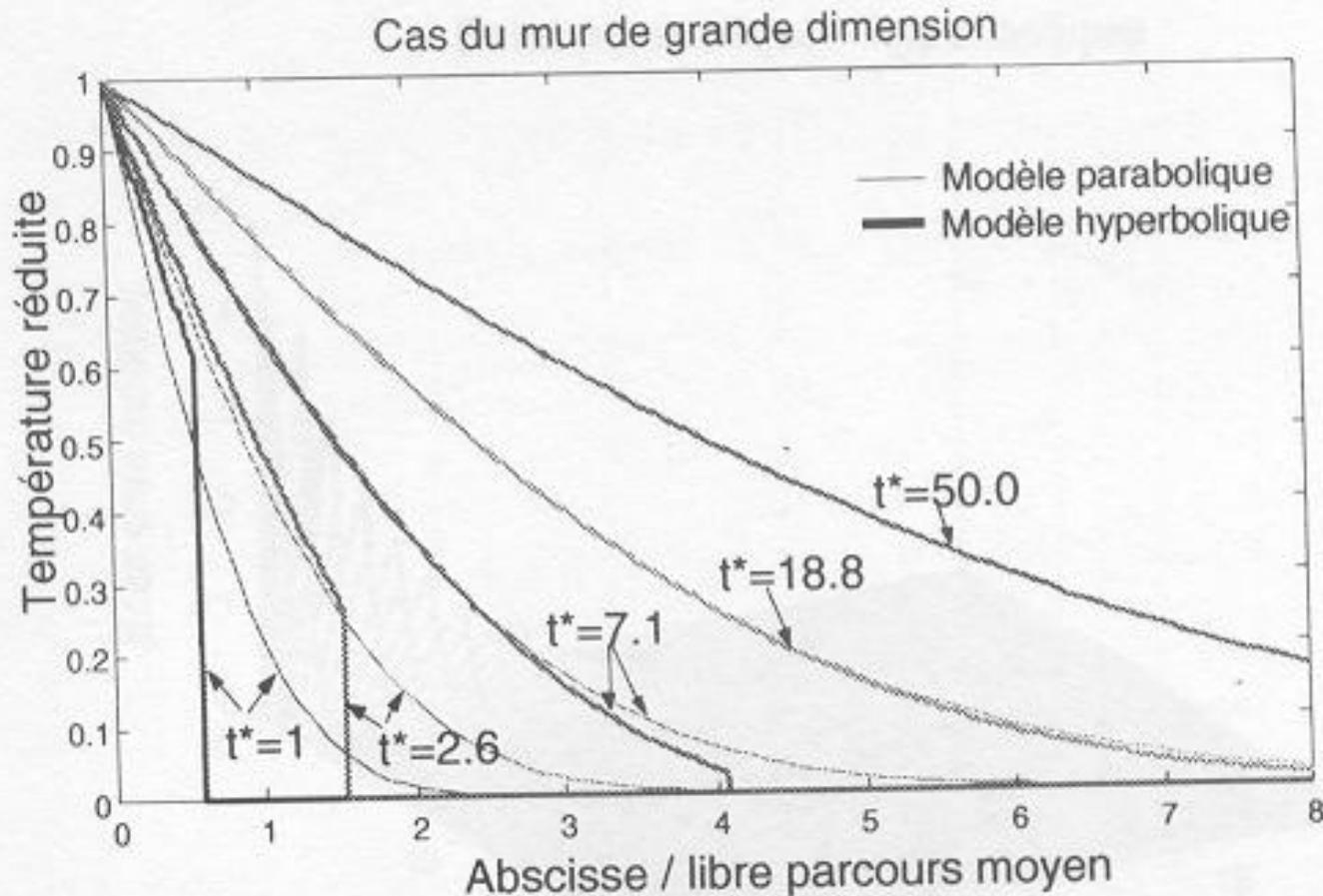
$$t^* = \frac{\tau}{\varepsilon}$$

où  $T_1$  est l'amplitude du saut de température imposée,  
 $l_{pm}$  est le libre parcours moyen des porteurs d'énergie, lié  
à la conductivité thermique par la relation suivante

$$\lambda = \frac{1}{3} \rho c_v V_{son} l_{pm}$$

[8] Baumeister K.J., Hamil T.D., Hyperbolic heat conduction equation — a solution for semi-infinite body problem, J. Heat Tran. 93 (1971) 126-128.

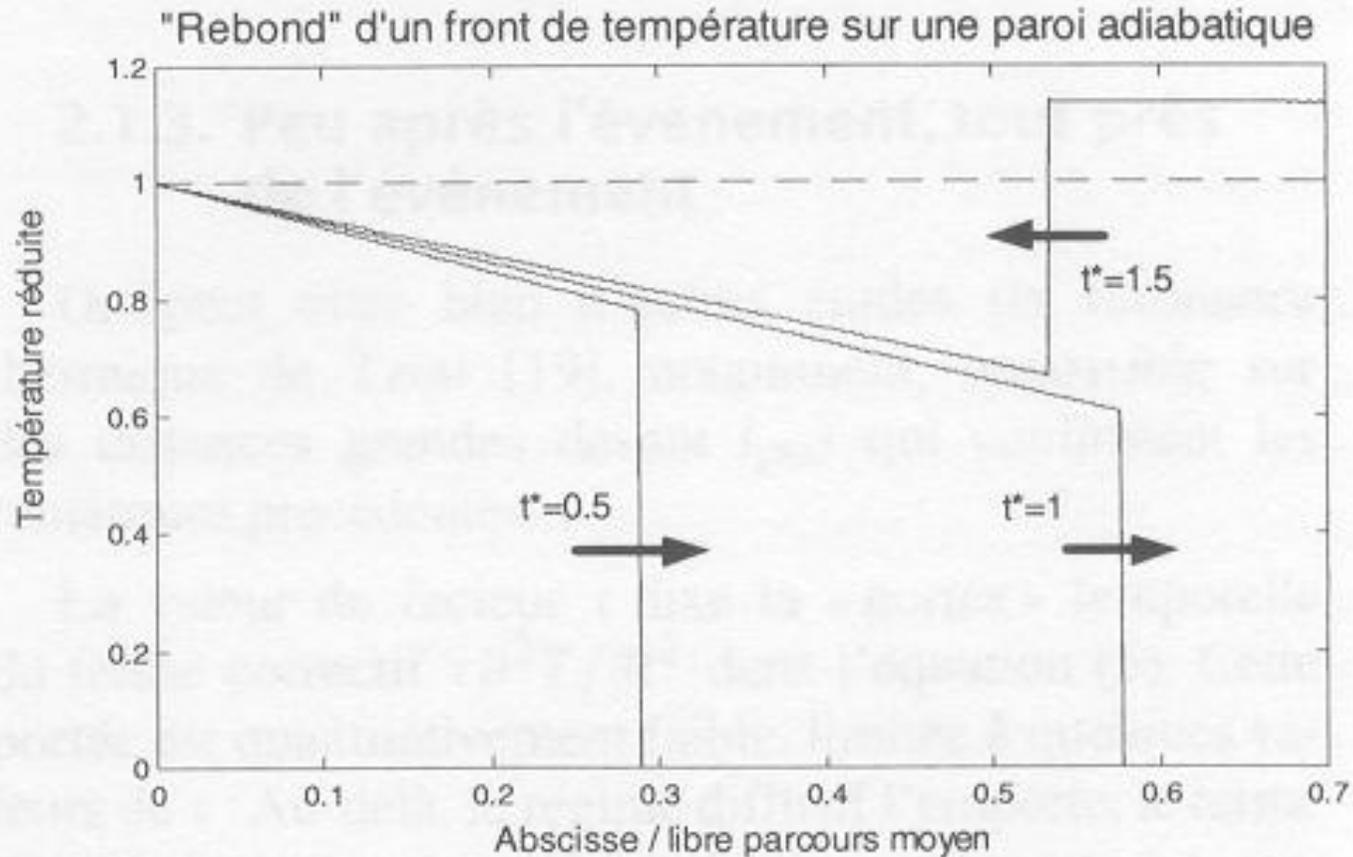




**Figure 5.** Champ de température prévu par le modèle hyperbolique dans un mur fini de grande dimension soumis à un échelon de température imposé en paroi.

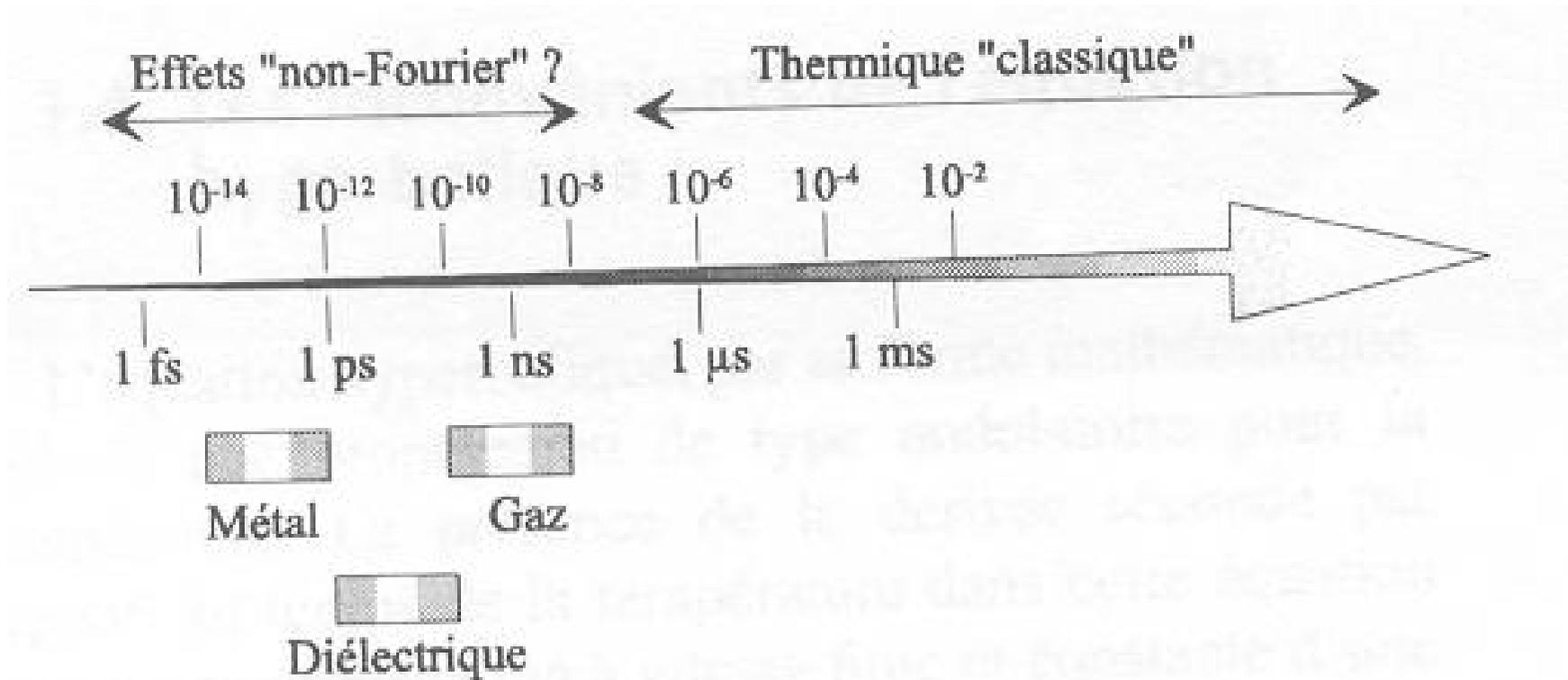
**Figure 5.** Temperature field obtained by the hyperbolic model in a large finite wall submitted to front temperature step.

$$t^* = \frac{\tau}{\varepsilon}$$



**Figure 4.** Champ de température dans un mur fini soumis à un échelon unitaire de température, imposé sur sa face avant et isolé sur sa face arrière.

**Figure 4.** Temperature field in a finite wall, submitted to a front temperature step at its frontier and thermally insulated on its back side.



**Figure 1.** Echelle des temps et valeurs classiquement admises des temps de relaxation de propagation de la chaleur.

**Figure 1.** Time scale and classically admitted values of heat propagation relaxation time.

P. Guillemet, JP. Bardon, Int.J. Therm. Sci. 2000, 968-982

Nelle relazioni precedenti si è assunto che si abbiano **condizioni di equilibrio termodinamico locale**.

Ipotesi alla base della Termodinamica Irreversibile della scuola belga (DeGroot, Prigogine).

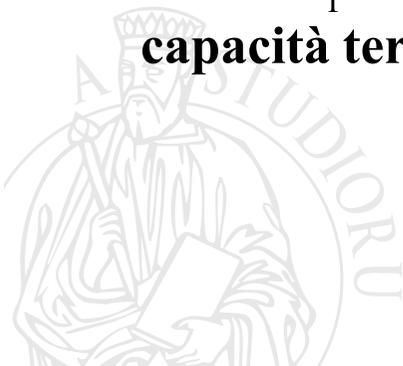
In queste condizioni **la temperatura è definibile seguendo la procedura** riportata da Zemansky ed alla base della definizione della scala di temperatura del SI.

E' possibile infatti definire il calore in modo operativo.

Se un sistema (corpo) con confini rigidi è alla temperatura  $T_1$  e viene posto in contatto tramite parete conduttrice con un altro simile che si trova alla temperatura inferiore  $T_2$ , osserviamo SPERIMENTALMENTE che dopo un certo tempo essi sono in equilibrio termico e vale la relazione:

$$C_1 (T_1 - T_f) = C_2 (T_f - T_2)$$

con  $T_f$  temperatura equilibrio,  $C$  costanti rilevate sperimentalmente e chiamate **capacità termiche**. Definiamo allora la grandezza  $Q = C \cdot \Delta T$  come **calore scambiato**



## 54 THÉORIE DE LA CHALEUR.

pendant l'unité de temps, passe à travers une étendue égale à l'unité de surface prise sur une section parallèle à la base.

Ainsi l'état thermométrique d'un solide compris entre deux bases parallèles infinies dont la distance perpendiculaire est  $e$ , et qui sont maintenues à des températures fixes  $a$  et  $b$ , est représenté par les deux équations :

$$v = a + \frac{b-a}{e} z, \text{ et } F = K \frac{a-b}{e} \text{ ou } F = -K \frac{dv}{dz}.$$

La première de ces équations exprime la loi suivant laquelle les températures décroissent depuis la base inférieure jusqu'à la face opposée; la seconde fait connaître la quantité de chaleur qui traverse, pendant un temps donné, une partie déterminée d'une section parallèle à la base.

In **condizioni stazionarie** e monodimensionali il I° Principio vale:  
Assumendo la definizione sperimentale di flusso termico, che avviene solo in presenza di differenze di temperatura [Zemansky], avremo:

$$\frac{dq'_x}{dx} = 0$$

$$\frac{d(f(\Delta T))}{dx} = 0$$

Le possibili funzioni sono:

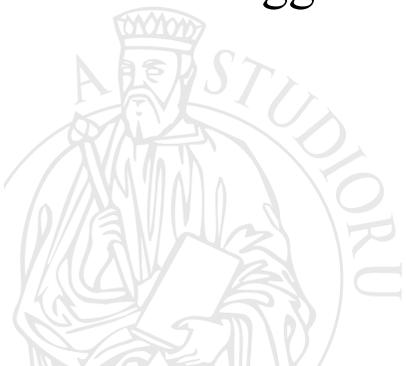
$T$  costante che significa  $Q'_x/(dzdy) = q'_x = 0$

$$\frac{dT}{dx} = \text{cost.} \quad \text{che implica} \quad q'_x = k \frac{dT}{dx}$$

$$k \frac{dT}{dx} = \text{cost.} \quad \text{valida anche per } k = f(T) \neq f(x)$$

poiché  $q'_x > 0$  per  $dx > 0$  e  $dT < 0$  in accordo col II° Principio, si ottiene la legge di Fourier

$$q'_x = -k \frac{dT}{dx}$$



E' interessante notare che, in condizioni stazionarie la generazione di entropia dovuta alle irreversibilità porta a ricavare di nuovo la Legge di Fourier ed inoltre presenta un estremo. Infatti scrivendo il II Principio per un sistema chiuso si ha:

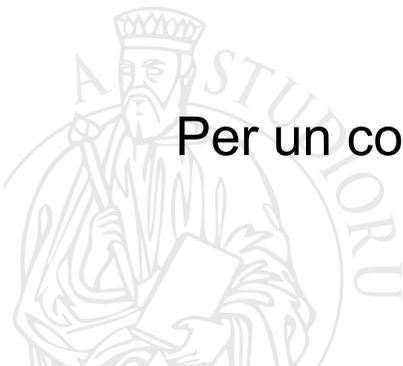
$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \int_V \rho s dV \right] = \int_A \frac{1}{T} \mathbf{q} \mathbf{n} dA + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \int_V \rho s_g dV \right] = \int_V \nabla \cdot \frac{1}{T} \mathbf{q} dV + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \int_V \rho s_g dV \right]$$

Quindi la generazione di entropia è:

$$\rho \frac{ds_g}{d\tau} dV = \rho \dot{s} dV + \mathbf{q}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} dA(r) \frac{1}{T^2} \nabla T \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{1}{T} (\nabla \mathbf{q} \cdot d\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} dA(r)$$

Con  $A(r)$  perpendicolare al versore  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{q}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \mathbf{q}(\mathbf{r}) + \nabla \mathbf{q} \cdot d\mathbf{r}$

Per un corpo rigido si ha dal I° principio si ottiene:  $\dot{q} = \rho c \frac{dT}{d\tau} = \rho \frac{du}{d\tau}$



Quindi dalla definizione di entropia si ha:

$$\rho \dot{s}_g dV = \frac{\rho}{T} \frac{du}{d\tau} dV + \mathbf{q}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} \frac{\nabla T}{T^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} dA - \rho \frac{du}{d\tau} \frac{dV}{T} = \left[ \mathbf{q}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} \right] \left[ \frac{\nabla T}{T^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right] dA(r)$$

Considerando che  $S_g = \int_0^\tau dt \int_V v dV \sigma$  E con  $rdA = (r/r)dV$  si ha:

$$\rho \dot{s}_g = \sigma = \left[ \mathbf{q}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \left[ \frac{\nabla T}{T^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \frac{rdA(r)}{dV}$$

Espressione della generazione di entropia per unità di volume, costante in condizioni stazionarie e quindi la sua derivata sarà nulla:



$$\frac{d\sigma}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d(\nabla T)}{d\tau} = 0 \Rightarrow \nabla T = -\frac{1}{k}\mathbf{q}$$

Che è proprio l'equazione di Fourier.

Considerando la direzione  $\mathbf{r}$  coincidente col gradiente di temperatura

$$\rho\dot{s}_g = \sigma = \mathbf{q}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\nabla T}{T^2} = -\mathbf{q}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \left( \frac{1}{T} \right)$$

Inserendo la legge di Fourier si ottiene

$$-k \left( \frac{\nabla T}{T} \right)^2 V \tau \leq \frac{C}{T - T_0}$$

Si può dimostrare utilizzando il principio di minima azione [Lucia, Grazzini] che questa espressione corrisponde ad un **massimo della variazione di entropia per l'ambiente circostante**. Quindi la variazione di entropia dovuta alle irreversibilità presenta un minimo per il sistema.



La legge di Fourier vale quindi in condizioni stazionarie.  
E' lecito applicarla a situazioni che non lo sono come fatto per ricavare  
l'equazione del Cattaneo?

Secondo Ernst Mach [1977] “i fenomeni della natura sono determinati in modo univoco” “ammetto la possibilità di scoprire nei più diversi domini della fisica leggi analoghe a quella della minima azione”

Abbiamo visto che in condizioni stazionarie vale il principio di **Massima** **P**roduzione di **E**ntropia nell'ambiente, equivalente alla **Minima** **P**roduzione di **E**ntropia nel sistema.

**Che succede in condizioni non stazionarie?**





Grazie per l'attenzione

Ricerche svolte in collaborazione col Dott. Umberto Lucia del Politecnico di Torino





## Bibliografia citata

C. Cattaneo, Sulla Conduzione del Calore, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 3 (1948) 83-101

J.B.J. Fourier, Théorie analytique de la chaleur, F. Didot, Paris, 1822

P. Galison, Gli orologi di Einstein, le mappe di Poincaré, RCS MediaGroup, Milano, 2014

P. Guillemet, JP. Bardou, Conduction de la chaleur aux temps courts: les limites spatio-temporelles des modèles parabolique et hyperbolique, Int.J. Therm. Sci. 2000, 968-982

U. Lucia, G. Grazzini, The Second Law Today: Using Maximum-Minimum Entropy Generation, Entropy 2015, 17, 7786-7797

E. Mach La meccanica nel suo sviluppo storico-critico, Boringhieri 1977

L. Russo L'America dimenticata, Mondadori, 2013

D. Y. Tzou, An engineering assessment to the relaxation time in thermal wave propagation, Int. J. of Heat and Mass Transfer 36 (1993) 1845-1851

M.W. Zemansky, Calore e Termodinamica, Zanichelli 1970

